Durée : 4 H

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps $\mathbb{R}$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Considérant deux vecteurs x et y de E tels que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i$; $y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i$ on note (x/y) le produit scalaire de E défini par $(x/y) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

$\mathcal{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E. On note id l'endomorphisme identité. (On rappelle que, pour tout élément $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un élément unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$, appelé adjoint de u, tel que $\forall\, x, y \in E \quad (u(x)/y) = (x/u^*(y))$.

– I –

Considérant deux endomorphismes auto-adjoints u et v, on dit que u est supérieur à v et on note $u \geq v$ si et seulement si $\forall\, x \in E \quad (x/u(x) - v(x)) \geq 0$ (on dit que $u - v$ est semi-défini positif)

1 – La relation ainsi définie sur l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints est-elle une relation d'ordre ? Si oui l'ordre est-il total ?

2 – Vérifier que $\left.\begin{matrix} f \in \mathcal{L}(E) \\ u \geq v \end{matrix}\right| \Rightarrow fouof^* \geq fovof^*$

3 – Montrer que $u \geq 0$ si et seulement si u a toutes ses valeurs propres positives ou nulles.

4 – Soit u un endomorphisme auto-adjoint tel que $u \geq 0$.

Etablir l'existence d'un endomorphisme auto-adjoint $c \geq 0$ tel que $u = c^2 = coc$. c est appelé racine carrée positive de u.

5 – Prouver que les sous-espaces propres d'un endomorphisme c, racine carrée positive de u, sont les mêmes que les sous-espaces propres de u.

En déduire l'unicité de la racine carrée positive de u que l'on notera dans la suite $c = u^{1/2}$.

6 – Donner une condition nécessaire et suffisante sur u pour que l'endomorphisme $u^{1/2}$ soit inversible et établir une relation entre les endomorphismes inverses de u et de $u^{1/2}$.

– II –

u étant un endomorphisme auto-adjoint on note $sp\ u$ le spectre ordonné de u c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres de u (avec leurs ordres de multiplicité) rangées par ordre décroissant. Si u et v sont deux endomorphismes auto-adjoints, dont les spectres ordonnés sont $sp\ u = \{ \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \}$ et $sp\ v = \{ \mu_1 \geq \mu_2 \geq ... \geq \mu_n \}$ on écrira :
$sp\ u \geq sp\ v \Leftrightarrow \lambda_i \geq \mu_i \quad \forall i = 1, ..., n.$

1 – Soient $U_1, ..., U_p$ des vecteurs propres orthogonaux de u associés à des valeurs propres $\lambda_{i_1} \geq ... \geq \lambda_{i_p}$ et A l'espace engendré par ces p vecteurs.

Déterminer les valeurs minimale et maximale du rapport $\dfrac{(x/u(x))}{(x/x)}$ lorsque x parcourt A, x étant non nul.

2 – Soient u et v deux endomorphismes auto-adjoints satisfaisant $u \geq v$.

On note A le sous-espace engendré par $n-p+1$ vecteurs propres orthogonaux associés aux $n-p+1$ plus petites valeurs propres de u et A' le sous-espace engendré par p vecteurs propres orthogonaux associés aux p plus grandes valeurs propres de v.

Calculer les nombres $\underset{\substack{x \in A \\ x \neq 0}}{Max} \dfrac{(x/u(x))}{(x/x)}$ et $\underset{\substack{x \in A' \\ x \neq 0}}{Min} \dfrac{(x/v(x))}{(x/x)}$

En déduire que $sp\ u \geq sp\ v$.

3 – L'implication réciproque ($sp\ u \geq sp\ v \Rightarrow u \geq v$) est-elle vraie pour $n \geq 2$? Pourquoi ?

4 – a) Soient $(U_1, ..., U_n)$ $(resp. V_1, ..., V_n))$ une base orthonormée de vecteurs propres de u (resp. de v). Montrer que l'endomorphisme f défini par $f(V_i) = U_i \ \forall i = 1, ..., n$ est tel que $(f(x)/f(x)) = (x/x)$.

b) Montrer que $sp\ u \geq sp\ v$ si et seulement si il existe un endomorphisme f orthogonal tel que $u \geq fovof^*$.

5 – Soit f un endomorphisme, vérifiant $fof^* = id$, tel que $u \geq fouof^*$.

Soit $\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_q$, $q \leq n$, les valeurs propres distinctes de u et $A_1, ..., A_q$ les sous–espaces propres correspondants.

a) Vérifier que u et $fouof^*$ ont mêmes valeurs propres.

b) Montrer que le sous–espace propre A_q est invariant par f^* et que les restrictions de u et $fouof^*$ à A_q sont égales.

c) Prouver que A_q et son orthogonal $G = A_1 \oplus ... \oplus A_{q-1}$ sont stables par f.

d) En déduire que tout sous–espace propre de u est invariant par f^*, par f et que $u = fouof^*$.

– III –

Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.
Tout vecteur x de E se décompose de manière unique sous la forme $x = y + z$; $y \in F$, $z \in G$.
L'application linéaire qui à x associe $y \in F$ est appelée projecteur sur F parallèlement à G.
Si u est un endomorphisme auto-adjoint inversible tq $u \geq 0$, on peut définir un produit scalaire $(./.)_u$ par $\forall x, y \in E \quad (x/y)_u = (x/u(y))$.

1 – On définit le sous–espace $F^\perp = \{x \in E : (x/y)_u = 0 \ , \ \forall y \in F\}$; montrer que F et $F^\perp$ sont deux sous–espaces supplémentaires de E.

On appelle alors projecteur u-orthogonal sur F la projection sur F parallèlement au sous-espace $F^\perp$.

2 – Montrer que le projecteur u–orthogonal sur F, noté p, qui vérifie évidemment $pop = p$ est tel que la restriction de $(uop - p^*ou)$ à F est nulle ; en déduire que $uop = p^*ouop$, que l'endomorphisme uop est auto–adjoint et finalement que $uop = p^*ou$.

3 – Soit p un endomorphisme tel que $pop = p$ et $p^* ou = uop$.
a) Prouver que le noyau de l'adjoint d'un endomorphisme est l'orthogonal de l'image de cet endomorphisme.
b) On définit le sous–espace $F = \{x \in E : p(x) = x\} = \{p(x) : x \in E\}$; montrer que $F^\perp = Kerp$ et en déduire que p est un projecteur u-orthogonal sur F.

4 – En déduire que, si p est le projecteur u-orthogonal sur F, p^* est le projecteur u^{-1}-orthogonal sur un sous-espace que l'on précisera.

5 – Etablir l'égalité : $u^{-1} = pou^{-1}op^* + (id - p)ou^{-1}o(id - p)^*$
En déduire que $u^{-1} \geq pou^{-1}op^*$.

6 – Soit g un projecteur sur F parallèlement à un sous-espace G, montrer que $gou^{-1}og^* \geq pou^{-1}op^*$.

7 – Réciproquement montrer que si f est un projecteur sur F vérifiant pour tout autre projecteur g sur F
$gou^{-1}og^* \geq fou^{-1}of^*$
alors f est le projecteur u-orthogonal p sur F.

8 – En déduire que si f est un projecteur sur F, $fou^{-1}of^*$ n'est comparable à u^{-1} pour la relation $\geq$ que si f est le projecteur u-orthogonal p sur F.